УДК 517.9

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НЕЙМАНА В ОБЛАСТЯХ С НАКОПИТЕЛЯМИ

©А. А. Ковалевский

Выяснение асимптотического поведения решений задач Неймана в последовательности областей $\Omega_s \subset \Omega \subset R^n$ и вида соответствующей усредненной задачи тесно связано с вопросом о существовании последовательности операторов продолжения $p_s : W^{1,m}(\Omega_s) \to W^{1,m}(\Omega)$, обладающей свойством: из неравенства $\sup_s \|u_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} < \infty$ следует ограниченность $\{p_s u_s\}$ в $W^{1,m}(\Omega)$. Если такая последовательность операторов существует, то говорят, что области Ω_s сильно связаны относительно области Ω; в противном случае говорят о слабой связности областей Ω_s относительно Ω. В некоторых ситуациях полезным является следующее обобщение понятия сильной связности областей. Пусть имеются семейства $\{\Omega_r'\}$, $\{\Omega_r''\}$ областей в R^n, причем $\forall r \Omega_r' \subset \Omega_r''$. Говорят, что области Ω_r' сильно связаны относительно областей Ω_r'', если существует семейство операторов продолжения $p_r : W^{1,m}(\Omega_r') \to W^{1,m}(\Omega_r'')$, обладающее свойством: из неравенства $\sup_r \|u_r\|_{W^{1,m}(\Omega_r')} < \infty$ следует неравенство $\sup_r \|p_r u_r\|_{W^{1,m}(\Omega_r'')} < \infty$; если же такого семейства операторов не существует, то говорят о слабой связанности соответствующих областей.

Понятия сильной связанности областей были введены, хотя и в несколько иной, чем здесь, форме, в [1]-[4].

Результаты работ [1],[5]-[7] показывают, что последовательности задач Неймана для эллиптических уравнений в сильно связанных областях в качестве усредненной отвечает также задача Неймана для одного дифференциального уравнения.

Что касается слабо связанных областей, то возможны качественно различные случаи усреднения задач Неймана в таких областях. Одним из примеров слабо связанных областей являются области Ω_s, для которых имеет место разложение $\Omega_s = \Omega_s' \cup H_s \cup \Omega_s''$, где области Ω_s', Ω_s'' сильно связаны относительно Ω, $\lim_{s\to\infty} \operatorname{mes} H_s = 0$. Усреднение задач Неймана для эллиптических уравнений в областях подобного типа приводит к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений [1],[2],[8],[9]. К другому типу слабо связанных областей относятся области Ω_s, представимые в виде $\Omega_s = \Omega_s' \cup H_s \cup E_s$, где области Ω_s' сильно связаны относительно Ω, $\lim_{s\to\infty} \operatorname{mes} H_s = 0$, открытые множества E_s являются обьединениями непересекающихся областей $E_s^j (j \in J_s)$, называемых накопителями. Если области E_s^j сильно связаны относительно шаров B_s^j минимального радиуса, содержащих E_s^j, то эти области будем называть простыми накопителями; если же области E_s^j слабо связаны относительно шаров B_s^j, то эти области будем называть сложными накопителями. В работах [3],[4],[10] для вариационных уравнений установлены условия, при которых усреднение задач Неймана в областях с простыми накопителями приводит к системе функционального и дифференциального уравнений.

Настоящая статья посвящена изучению асимптотики решений задач Неймана в трехмерных областях с периодически расположенными накопителями для нелинейных эллиптических уравнений общего дивергентного вида (т.е. не обязательно вариационных). В п.1 описывается поведение решений задач Неймана в областях с простыми накопителями. Устанавливается, что этим задачам в качестве усредненной отвечает задача для системы функционального и дифференциального уравнений. В п.2 описывается поведение решений задач Неймана в областях со сложными (двойными) накопителями. Усреднение этих задач приводит к системе из двух функциональных и одного дифференциального уравнения. Отметим, что ранее асимптотика решений краевых задач в областях со сложными накопителями не изучалась.

1. **Усреднение задач Неймана в областях с простыми накопителями.**

Введем обозначения: $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i| < \frac{1}{2},\ i = 1,2,3\}$; если $y \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{N}$, то $Q_t(y) = y + t^{-1}Q$. Положим $\Omega = 2Q$ и пусть для любого $s \in N$ $Z_s = \{z \in \Omega :\ sz_i - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z},\ i = 1,2,3\}$. Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s^{(1)} = \Omega \setminus \bigcup_{z \in Z_s} (z + \beta s^{-1}\overline{Q}), \quad \Omega_s^{(2)} = \bigcup_{z \in Z_s} (z + \alpha s^{-1}Q).$$

Пусть еще $\tau > 1$, $0 < \rho < \alpha$. Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1,2,3\}$ положим

$$\Lambda_s^i = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{\alpha}{2} \le x_i \le \frac{\beta}{2},\ \forall j \ne i\ |x_j| < \frac{\rho}{2} s^{1-\tau}\}.$$

Наконец, положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $\Lambda_s = \Lambda_s^1 \cup \Lambda_s^2 \cup \Lambda_s^3$,

$$H_s = \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}\Lambda_s), \quad \Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup \Omega_s^{(2)}.$$

Области Ω_s содержат простые накопители $z + \alpha s^{-1}Q$, $z \in Z_s$, и, вообще говоря, не являются сильно связанными относительно Ω.

Пусть $m > 1$, $m' = \frac{m}{m-1}$, $1 < m_1 \le m$, $m_2 \ge m$, $c \ge 1$, μ- неубывающая непрерывная в нуле функция на $[0,\infty)$, $\mu(0) = 0$, для любого $i \in \{1,2,3\}$ e^i - орт i-го направления в $\mathbb{R}^3$, a_i - функция на $\Omega \times \mathbb{R}^3$. Будем предполагать, что для любых $x,\ x' \in \Omega,\ \eta,\ \eta' \in \mathbb{R}^3$

$$\sum_{i=1}^{3} |a_i(x, \eta - \eta_i e^i)| = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} |a_i(x,\eta) - a_i(x',\eta')|^{m'} \le$$

$$\le \mu(|x - x'|)(1 + |\eta|)^m + c(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_1} |\eta - \eta'|^{m_1},$$

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i(x,\eta) - a_i(x,\eta'))(\eta_i - \eta_i') \ge c^{-1}(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_2} |\eta - \eta'|^{m_2}.$$

Пусть еще a - функция на $\Omega \times \mathbb{R}$ такая, что для любых $x, x' \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$ $a(x,0) = 0$,

$$|a(x,\xi) - a(x',\xi')|^{m'} \le \mu(|x - x'|)(1 + |\xi|)^m + c(1 + |\xi| + |\xi'|)^{m-m_1} |\xi - \xi'|^{m_1},$$

$$(a(x,\xi) - a(x,\xi'))(\xi - \xi') \ge c^{-1}(1 + |\xi| + |\xi'|)^{m-m_2} |\xi - \xi'|^{m_2}.$$

Введем операторы A_s. Если $s \in \mathbb{N}$, то A_s - оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\langle A_s u, v \rangle = \int_{\Omega_s} \{\sum_{i=1}^{3} a_i(x, \nabla u)\partial_i v + a(x,u)v\} dx. \qquad (1)$$

Опишем оператор $\hat{A}$, который войдет в дифференциальную часть усредненной задачи, описывающей асимптотику решений уравнений с операторами A_s. Положим $\Pi = Q \backslash \beta\overline{Q}$ и пусть для любого $i \in \{1,2,3\}$ $Q^i = \{x \in \partial Q : x_i = -\frac{1}{2}\}$. Пусть теперь $W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi)$ - замыкание в $W^{1,m}(\Pi)$ множества всех функций $u \in C^1(\overline{\Pi})$, удовлетворяющих условию: для любых $i \in \{1,2,3\}$ и $x \in Q^i$ $u(x+e^i) = u(x)$. Из результатов [11] о разрешимости уравнений с монотонными операторами вытекает, что для произвольной пары $(y,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$ существует единственная функция $v_{y,\eta} \in W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi)$ такая, что $\int_\Pi v_{y,\eta} dx = 0$ и

$$\forall \phi \in W^{1,m}_{\text{per}}(\Pi) \quad \int_\Pi \{\sum_{i=1}^{3} a_i(y, \eta + \nabla v_{y,\eta}) \partial_i \phi\} dx = 0.$$

Введем функции $\hat{a}_i$. Если $i \in \{1,2,3\}$, то $\hat{a}_i$ - функция на $\Omega \times \mathbb{R}^3$ такая, что $\forall (y,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^3$ $\hat{a}_i(y,\eta) = \int_\Pi a_i(y, \eta + \nabla v_{y,\eta}) dx$. Пусть теперь $\hat{A}$ - оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle \hat{A}u, v \rangle = \int_\Omega \{\sum_{i=1}^{3} \hat{a}_i(x, \nabla u) \partial_i v + (1-\beta^3) a(x,u) v\} dx. \tag{2}$$

Возьмем $f \in L^{m'}(\Omega)$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, причем

$$\langle f_s, v \rangle = \int_{\Omega_s} f v dx, \quad v \in W^{1,m}(\Omega_s). \tag{3}$$

Нас будет интересовать поведение при $s \to \infty$ последовательности $\{A_s^{-1} f_s\}$. Для точного описания асимптотического поведения этой последовательности понадобятся два дополнительных предположения. Прежде всего предположим, что выполняется условие:

$\mathcal{H}$) для любых $i \in \{1,2,3\}$, $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^3$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1-m} a_i(x, \lambda\eta) = b_i(x,\eta),$$

где b_i, $i = 1,2,3$, - функции на $\Omega \times \mathbb{R}^3$.

Кроме того, предположим, что числа τ и m связаны соотношением

$$\tau - \frac{m}{2} = 1. \tag{4}$$

Положим теперь $\nu = 2(\beta - \alpha)^{-1}$ и введем обозначение: если $u \in L^m(\Omega)$, то F_u - отображение $L^m(\Omega)$ в $L^{m'}(\Omega)$, такое, что для любых $\psi \in L^m(\Omega)$ и $x \in \Omega$

$$(F_u \psi)(x) = -\nu^{m-1} \rho^2 \sum_{i=1}^{3} b_i(x, (u(x) - \psi(x)) e^i) + \alpha^3 [a(x, \psi(x)) - f(x)].$$

Заметим, что если $u \in L^m(\Omega)$, то существует единственная функция $\psi \in L^m(\Omega)$ такая, что $F_u \psi = 0$; если $u, u', \psi, \psi' \in L^m(\Omega)$, причем $F_u \psi = 0$, $F_{u'} \psi' = 0$, то

$$\int_\Omega (a(x,\psi) - a(x,\psi'))(u - u') dx \geq 0.$$

Введем обозначение: если $u \in L^m(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, то $q_s u = u|_{\Omega_s}$. Сформулируем теперь основной результат пункта.

Теорема 1. *Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1} f_s$. Тогда*

$$\lim_{s\to\infty} \int_{H_s} |u_s|^m dx = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(2)}} |\nabla u_s|^m dx = 0$$

и существуют функции $u \in W^{1,m}(\Omega)$, $\psi \in L^m(\Omega)$ такие, что $F_u \psi = 0$,

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(1)}} |u_s - q_s u|^m dx = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(2)}} |u_s - q_s \psi|^m dx = 0,$$

для любой функции $v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle \hat{A} u, v\rangle + \alpha^3 \int_\Omega a(x,\psi) v dx = (1 - \beta^3 + \alpha^3) \int_\Omega f v dx.$$

Доказательство теоремы не связано с вариационными методами работ [3],[4],[10], а основывается на специальном асимптотическом приближении функций u_s и использовании свойства равномерной монотонности коэффициентов операторов A_s.

2. **Усреднение задач Неймана в областях с двойными накопителями.** Пусть $0 < \alpha_0 < \beta_0 < \alpha < \beta < 1$. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s^{(1)} = \Omega \setminus \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}\beta \overline{Q}), \quad \Omega_s^{(2)} = \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}\alpha_0 Q),$$

$$\Omega_s^{(0)} = \bigcup_{z \in Z_s} \{(z + s^{-1}\alpha Q) \setminus (z + s^{-1}\beta_0 \overline{Q})\}.$$

Пусть еще $\tau > 1$, $0 < \rho_0 < \alpha_0$, $0 < \rho < \alpha$. Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1,2,3\}$ положим

$$\Lambda_s^i = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{\alpha}{2} \le x_i \le \frac{\beta}{2}, \ \forall j \ne i \ |x_j| < \frac{\rho}{2} s^{1-\tau}\},$$

$$M_s^i = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{\alpha_0}{2} \le x_i \le \frac{\beta_0}{2}, \ \forall j \ne i \ |x_j| < \frac{\rho_0}{2} s^{1-\tau}\}.$$

Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\Lambda_s = \Lambda_s^1 \cup \Lambda_s^2 \cup \Lambda_s^3, \quad M_s = M_s^1 \cup M_s^2 \cup M_s^3,$$

$$H_s = \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1}\Lambda_s), \quad H_s^{(0)} = \bigcup_{z \in Z_s} (z + s^{-1} M_s),$$

$$\Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup \Omega_s^{(0)} \cup H_s^{(0)} \cup \Omega_s^{(2)}.$$

Пусть a_i, $i = 1,2,3$, и a - такие функции, как описано в п.1; для любого $s \in \mathbb{N}$, A_s - оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega_s)$ имеет место равенство (1); $\hat{A}$ - оператор из $W^{1,m}(\Omega)$ в $(W^{1,m}(\Omega))^*$, определенный формулой (2). Возьмем $f \in L^{m'}(\Omega)$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ и определяется формулой (3). Будем предполагать, что выполняется условие $\mathcal{H}$) и числа τ и m связаны соотношением (4). Положим $\nu_0 = 2(\beta_0 - \alpha_0)^{-1}$, $\nu = 2(\beta - \alpha)^{-1}$ и введем обозначение: если $u \in L^m(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, то $q_s u = u|_{\Omega_s}$.

Теорема 2 . *Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s = A_s^{-1} f_s$. Тогда*

$$\lim_{s\to\infty} \int_{H_s \cup H_s^{(0)}} |u_s|^m dx = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(0)} \cup \Omega_s^{(2)}} |\nabla u_s|^m dx = 0$$

и существуют функции $u \in W^{1,m}(\Omega)$, $\phi, \psi \in L^m(\Omega)$ такие, что

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(1)}} |u_s - q_s u|^m dx = 0,$$

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(0)}} |u_s - q_s \phi|^m dx = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s^{(2)}} |u_s - q_s \psi|^m dx = 0,$$

для почти всех $x \in \Omega$

$$-\nu_0^{m-1} \rho_0^2 \sum_{i=1}^{3} b_i(x, (\phi(x) - \psi(x)) e^i) + \alpha_0^3 [a(x, \psi(x)) - f(x)] = 0,$$

$$- \nu^{m-1} \rho^2 \sum_{i=1}^{3} b_i(x, (u(x) - \phi(x)) e^i) +$$
$$+ \alpha_0^3 [a(x, \psi(x)) - f(x)] + (\alpha^3 - \beta_0^3)[a(x, \phi(x)) - f(x)] = 0,$$

для любой функции $v \in W^{1,m}(\Omega)$

$$\langle Au, v \rangle + \int_\Omega \{\alpha_0^3 a(x, \psi) + (\alpha^3 - \beta^3) a(x, \phi)\} v dx = (1 - \beta^3 + \alpha^3 - \beta_0^3 + \alpha_0^3) \int_\Omega f v dx.$$

1. *Хруслов Е.Я.* , Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. – 1978. – **106**, –*N 4*. – С. 604–621.
2. *Хруслов Е.Я.* , О сходимости решений второй краевой задачи в слабосвязанных областях. Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения // Киев : Наукова думка, – 1981. – С. 129–173.
3. *Хруслов Е.Я.* , Усредненная модель нестационарной диффузии в трещиновато-пористых средах // Харьков (Препринт / АН УССР. Физико-технический ин-т низких температур; 50-88). – 1988. – 34 с.
4. *Хруслов Е.Я.* , Усредненные модели диффузии в трещиновато-пористых средах // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, – *N 2*. – С. 332–335.
5. *Берлянд Л.В., Чудинович И.Ю.* , Осреднение краевых задач для дифференциальных операторов высших порядков в областях с пустотами // Докл. АН СССР. – 1983. – **272**, – *N 4*. – С. 777-780.
6. *Ковалевский А.А.* , Вторая краевая задача для вариационных эллиптических уравнений в областях сложной структуры // Киев (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.40). – 1984. – С. 3–22.
7. *Ковалевский А.А.* , G - сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения // Донецк (Препринт / АН УССР. Ин-т математики и механики; 90.01). – 1990. – 60 с.
8. *Панкратов Л.С.* , О сходимости решений вариационных задач в слабосвязанных областях // Харьков (Препринт / АН УССР. Физико-технический ин-т низких температур; 53.88). – 1988. – 25 с.
9. *Ковалевский А.А.* , G - сходимость абстрактных операторов, определенных на слабо связанных пространствах // Докл. АН УССР. – 1991. – *N 9*. – С. 27–30.
10. *Панкратов Л.С.* , Асимптотическое поведение решений вариационных задач в областях с «накопителями» // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1990. – **54**, – С. 97–105.
11. *Лионс Ж.-Л.* , Некоторые методы решения нелинейных краевых задач // М. : Мир, – 1972. – 587 с.